100pt →

Tentamen Analyse op Variëteiten
23 juni 2008

volgt uit

1.1 $A \in O(2,\mathbb{R})$ als $A^T A = E$ (en $\det A \neq 0$)

$$A^T A = \begin{pmatrix} x_{11}^2 + x_{21}^2 & x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} \\ x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} & x_{12}^2 + x_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_{11}^2 + x_{21}^2 - 1 = 0 \\ x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} = 0 \\ x_{12}^2 + x_{22}^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Vertalen naar $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{O}$ is $\mathbb{R}^4$-versie van $O(2,\mathbb{R})$. (met bovenstaande eigenschap dus)

$\underline{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$. $M_e = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \neq$

Bekijk $F: \{\underline{x} \to (x_{11}^2 + x_{21}^2 - 1,\ x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22},\ x_{12}^2 + x_{22}^2 - 1)$

$$D_x F = \begin{pmatrix} 2x_{11} & 0 & 2x_{21} & 0 \\ x_{12} & x_{11} & x_{22} & x_{21} \\ 0 & 2x_{12} & 0 & 2x_{22} \end{pmatrix}$$

Voor $\underline{x} \in M_e$ heeft $D_x F$ volle rang ($=3$) omdat voor die $\bar{x}$'jes

(beetje kort door de bocht) gelat $x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \neq 0$, (dus x_{11} en x_{12} zijn niet beiden nul en x_{21} en x_{22} ook niet beiden tegelijk, zelfde voor x_{22} en x

Dus voor elke $\underline{x} \in \mathcal{O}$, kies $U = \mathbb{R}^4$ en $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ zoals boven. Dan $U \cap \mathcal{O} = \{ \underline{x} \in U \mid F(\underline{x}) = 0 \}$ en $D_x F$ heeft volle rang (dat is 3). F is ook glad dus $\mathcal{O}$ is een gladde $(4-3=)$ 1-dimensionale deelvariëteit van $\mathbb{R}^4$.

Terugvertalen naar de matrices geeft dit dat $O(2,\mathbb{R})$ een 1-dimensionale deelvariëteit is van $M(2,\mathbb{R})$,
want $\bar{x} \in \mathcal{O} \Leftrightarrow A \in O(2,\mathbb{R})$
$F(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow A^T A = E$.

1.2 Ik kijk maar weer eens naar $\mathbb{R}^4$: $x = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$

$O(2,\mathbb{R})$ wordt $\mathcal{O} = \{\bar{x} \in M_e \mid F(\bar{x}) = 0\}$

$M(2,\mathbb{R})$ wordt $M_e = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} \neq 0\}$

E wordt $\bar{e} = (1\ 0\ 0\ 1)$

kijk nu naar $T_e\mathcal{O}$.

Er geldt $T_{\bar{e}}\mathcal{O} = \ker D_{\bar{e}}F$

$$D_{\bar{e}}F = \left.\begin{pmatrix} 2x_{11} & 0 & 2x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{11} & x_{22} & x_{21} \\ 0 & 2x_{12} & 0 & 2x_{22} \end{pmatrix}\right|_{\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\bar{v} \in \ker D_{\bar{e}}F$ als $D_{\bar{e}}F\,\bar{v} = 0$

$$D_{\bar{e}}F\ \bar{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_{11} \\ v_{12} + v_{21} \\ 2v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_{11} = v_{22} = 0$ en $v_{12} = -v_{21}$

Dus $\ker D_{\bar{e}}F = \{\bar{x} \in \cancel{\mathbb{R}^4} M_e \mid v_{12} = -v_{21},\ v_{11} = v_{22} = 0\} = T_{\bar{e}}\mathcal{O}$

Terug naar de matrices geeft dit:

$T_E O(2,\mathbb{R}) = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid \cancel{A}\ x_{12} = -x_{21},\ x_{11} = x_{22} = 0\}$

$$A^T + A = 0 \iff \begin{pmatrix} x_{11} + x_{11} & x_{21} + x_{12} \\ x_{12} + x_{21} & x_{22} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_{11} = x_{22} = 0 \\ x_{21} = -x_{21} \end{cases}$$

Dus $T_E O(2,\mathbb{R}) = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid A^T + A = 0\}$

4

✓

20

2.1 $\sigma = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

(σ is op heel $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd. Ik zou kunnen aantonen dat σ gesloten is en dan Poincaré's lemma gebruiken maar ik doe k[illegible] ok

$\to$ Neem $f = xyz$

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = \sigma$

Dus $\sigma = df$, dus σ is exact

2.2 $\to$ $\omega = xyz\,dx \wedge dy \wedge dz$

$d\omega = d(xyz) \wedge dx \wedge dy \wedge dz$

$= yz\,dx \wedge dx \wedge dy \wedge dz + xz\,dy \wedge dx \wedge dy \wedge dz + xy\,dz \wedge dx \wedge$[illegible]

$= 0$

Dus ω is gesloten, op heel $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd, dus exact. (Poincaré)

$\to$ Neem η van de vorm: $\eta = f\,dx \wedge dy + g\,dy \wedge dz + h\,dz \wedge$[illegible]

$d\eta = df \wedge dx \wedge dy + dg \wedge dy \wedge dz + dh \wedge dz \wedge dx$

$= \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial h}{\partial y}dy \wedge dz \wedge dx$

$= (\partial f/\partial z + \partial g/\partial x + \partial h/\partial y)\,dx \wedge dy \wedge dz$

$= xyz \quad dx \wedge dy \wedge dz$

Neem $f = h = 0$, $\partial g/\partial x = xyz \to g = \frac{1}{2}x^2yz$ + constant

Dus $\underline{\eta = \frac{1}{2}x^2yz\,dy \wedge dz}$ voldoet, want

$d\eta = xyz\,dx \wedge dy \wedge dz = \omega$ (Dus ω is exact)

2.3 $\phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

$\omega = xyz\,dx \wedge dy \wedge dz$

$\phi^*\omega = \phi^*(xyz)\,\phi^*(dx \wedge dy \wedge dz)$

$= xyz \circ \phi \cdot d(\phi^* x) \wedge d(\phi^* y) \wedge d(\phi^* z)$

$= xyz \circ \phi \cdot d(x \circ \phi) \wedge d(y \circ \phi) \wedge d(z \circ \phi)$

$= r^2\cos\theta\sin\theta z\; d(r\cos\theta) \wedge d(r\sin\theta) \wedge d(z)$

$= r^2\cos\theta\sin\theta z\,(\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta) \wedge (\sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta) \wedge$

$= r^2\cos\theta\sin\theta z\,(r\cos^2\theta\,dr \wedge d\theta - r\sin^2\theta\,d\theta \wedge dr) \wedge dz$

$= r^2\cos\theta\sin\theta z\,(r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,dr \wedge d\theta \wedge dz)$

$= r^3\cos\theta\sin\theta z\;dr \wedge d\theta \wedge dz$

25

3.1 $X = X_1 \partial/\partial x_1 + X_2 \partial/\partial x_2 + X_3 \partial/\partial x_3$

$$
\begin{aligned}
d\, i_X \Omega &= d(\, dx \wedge dy \wedge dz\,(X, -, \cdot)) \\
&= d(\, dx(X)\, dy \wedge dz - dy(X)\, dx \wedge dz + dz(X)\, dx \wedge dy) \\
&= d(\, X_1\, dy \wedge dz + X_2\, dz \wedge dx + X_3\, dx \wedge dy) \\
&= d(X_1) \wedge dy \wedge dz + d(X_2) \wedge dz \wedge dx + d(X_3) \wedge dx \wedge dy \\
&= \left(\tfrac{\partial X_1}{\partial x} dx + \cancel{\tfrac{\partial X_1}{\partial y} dy} + \cancel{\tfrac{\partial X_1}{\partial z} dz}\right) \wedge dy \wedge dz + \left(\cancel{\tfrac{\partial X_2}{\partial x} dx} + \tfrac{\partial X_2}{\partial y} dy + \cancel{\tfrac{\partial X_2}{\partial z} dz}\right) \wedge dz \wedge dx \\
&\quad + \left(\cancel{\tfrac{\partial X_3}{\partial x} dx} + \cancel{\tfrac{\partial X_3}{\partial y} dy} + \tfrac{\partial X_3}{\partial z} dz\right) \wedge dx \wedge dy \\
&= \tfrac{\partial X_1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \tfrac{\partial X_2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \tfrac{\partial X_3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
&= \left(\tfrac{\partial X_1}{\partial x} + \tfrac{\partial X_2}{\partial y} + \tfrac{\partial X_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \\
&= (\operatorname{div} X)\, \Omega
\end{aligned}
$$

Dus $\operatorname{div} X = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}$

3.2 Als $\operatorname{div} X = 0$, dan $d\, i_X \Omega = 0 \cdot \Omega = 0$, dus $i_X \Omega$ is dan gesloten. $i_X \Omega = X_1\, dy \wedge dz + X_2\, dz \wedge dx + X_3\, dx \wedge dy$

X is een glad vectorveld op $\mathbb{R}^3$, dus $i_X \Omega$ is ook goed gedefinieerd op heel $\mathbb{R}^3$. $i_X \Omega$ is daarom exact. (Poincaré)

Er bestaat dus een 1-vorm τ zodat $i_X \Omega = d\tau$. Neem aan $\tau = Y_1\, dx + Y_2\, dy + Y_3\, dz$.

dan
$$
\begin{aligned}
d\tau &= d(Y_1) \wedge dx + d(Y_2) \wedge dy + d(Y_3) \wedge dz \\
&= \tfrac{\partial Y_1}{\partial y} dy \wedge dx + \tfrac{\partial Y_1}{\partial z} dz \wedge dx + \tfrac{\partial Y_2}{\partial x} dx \wedge dy + \tfrac{\partial Y_2}{\partial z} dz \wedge dy + \tfrac{\partial Y_3}{\partial x} dx \wedge dz + \tfrac{\partial Y_3}{\partial y} dy \wedge dz \\
&= \left(\tfrac{\partial Y_3}{\partial y} - \tfrac{\partial Y_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\tfrac{\partial Y_1}{\partial z} - \tfrac{\partial Y_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\tfrac{\partial Y_2}{\partial x} - \tfrac{\partial Y_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\
&= i_X \Omega = X_1\, dy \wedge dz + X_2\, dz \wedge dx + X_3\, dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

Dus $\bar{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial Y_3/\partial y - \partial Y_2/\partial z \\ \partial Y_1/\partial z - \partial Y_3/\partial x \\ \partial Y_2/\partial x - \partial Y_1/\partial y \end{pmatrix} = \nabla \times \bar{Y}$ met $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$

Dus er bestaat een Y zodat $X = \nabla \times Y$ als $\operatorname{div} X = 0$.

20

Analyse op Variëteiten

4.1

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x_i}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}} \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \, d\Big(\underbrace{\frac{x_i}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}}}_{=\,\omega_i}\Big) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx_j\Big) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n\Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

alleen voor $j = i$ blijft $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \wedge dx_j \wedge \hat{\ } \wedge dx_n$, omdat $dx_i \wedge dx_i = 0$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

dx_i op goede plek zetten

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}\Big) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n .$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = \frac{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2} \cdot 1 - x_i \cdot 2x_i \cdot \frac{n}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2 - 1}}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^n}$$

$$\text{Dus } \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2} - n \, x_i^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2 - 1}}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^n}$$

$$= \frac{n(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2 - 1}}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^n}$$

$$= \frac{n (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2} - (x_1^2 + \dots + x_n^2)(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2 - 1}}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^n} = 0$$

~~Dus ω is gesloten~~

Dus $d\omega = 0 \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 0$, dus ω is gesloten.

4.2

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$d\eta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} d(x_i) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = n \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = n \, \Omega$$

$$\int_{S^{n-1}} \eta \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{B^n} d\eta = n \int_{B^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \overset{\neq 0}{n} \cdot (\text{n-dimensionale } \overset{\neq 0}{\text{volume}} \text{ van } B^n) \neq 0$$

n dimensionale eenheidsbol, zodat $\partial B^n = S^{n-1}$

4.3 op S^{n-1} geldt dat $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

Dus $\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{S^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x_i}{(1)^{n/2}} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$

$= \int_{S^{n-1}} \eta \neq 0$.

4.4 Stel: ω is wel exact: $\omega = d\beta$ voor een zeker $(n-2)$vorm β

Dan $\int_{S^{n-1}} \omega = \int_{S^{n-1}} d\beta \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S^{n-1}} \beta = \int_{\emptyset} \beta = 0$

want $\partial S^{n-1} = \emptyset$. Ik heb echter net laten zien dat $\int_{S^{n-1}} \omega \neq 0$, dus hier is sprake van tegenspraak.

Daarom moet ik wel concluderen dat ω niet exact is.

(hier klinkt lichte spijt in door)

4.5 Stel dat er wel een diffeomorfisme ϕ bestaat tussen $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Bekijk $d\phi^* \omega$, dat is een $(n-1)$-vorm op $\mathbb{R}^n$.

$\cancel{\phi^* \omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \phi^* \left(\frac{x_i}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}} \right) \phi^* (dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n)}$

$d\phi^* \omega = \phi^* (d\omega) = \phi^* (0) = 0$

Dus $\phi^* \omega$ is gesloten. Omdat $\phi^* \omega$ een $(n-1)$vorm op $\mathbb{R}^n$ is geldt met Poincaré's lemma dat $\phi^* \omega$ exact is. Echter, exactheid blijft bewaard onder een diffeomorfisme, dus ω is ook exact. Maar wacht, ik heb net bewezen dat ω niet exact is! Daar klopt dus iets niet: mijn aanname was fout. Mijn conclusie is dat er geen diffeomorfisme bestaat tussen $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $\square$

25

Perfect werk!